

Exercice 1

La forme forte du problème s'écrit

$$\varphi(x) \in C^2([0, \ell]) : -GI_p (d^2\varphi/dx^2) = 0 \quad 0 < x < \ell$$

avec les conditions naturelles de bord

$$GI_p (d\varphi/dx) \Big|_{x=0} = M_t$$

$$GI_p (d\varphi/dx) \Big|_{x=\ell} = M_t$$

La formulation intégrale associée a pour expression

$$\int_0^\ell [-GI_p (d^2\varphi/dx^2)] \delta\varphi dx = 0 \quad \forall \delta\varphi$$

où $\delta\varphi$ dénote la rotation virtuelle. Par intégration par parties, on trouve

$$\int_0^\ell GI_p (d\varphi/dx)(d\delta\varphi/dx) dx - [GI_p (d\varphi/dx)\delta\varphi] \Big|_0^\ell = 0 \quad \forall \delta\varphi$$

Par insertion des deux conditions aux limites naturelles, cette expression devient

$$\int_0^\ell GI_p (d\varphi/dx)(d\delta\varphi/dx) dx + M_t \delta\varphi(0) - M_t \delta\varphi(\ell) = 0 \quad \forall \delta\varphi$$

de sorte que la forme faible du problème a pour expression

$$\varphi \in \mathcal{U} : \int_0^\ell GI_p (d\varphi/dx)(d\delta\varphi/dx) dx = M_t [\delta\varphi(\ell) - \delta\varphi(0)] \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{V}$$

avec les classes de fonctions suivantes

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{w(x) \mid w(x) \in H^1([0, \ell])\}$$

où w est indifféremment l'angle de rotation φ ou sa contrepartie virtuelle $\delta\varphi$.

La forme faible approchée s'écrit

$$\varphi^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} : \int_0^\ell GI_p (d\varphi^h/dx)(d\delta\varphi^h/dx) dx = M_t [\delta\varphi^h(\ell) - \delta\varphi^h(0)]$$

$$\forall \delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

où φ^h et $\delta\varphi^h$ sont les rotations approchées réelle et virtuelle et où $\mathcal{U}^h$ et $\mathcal{V}^h$ sont les sous-espaces respectifs de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Dans l'approche locale des éléments finis, les approximations φ^h et $\delta\varphi^h$ sont restreintes à un élément fini générique $^e\Omega$. Ces restrictions ont les allures suivantes

$$^e\varphi^h(x) = \sum_{i=1}^n {}^eq_i {}^eh_i(x)$$

$$^e\delta\varphi^h(x) = \sum_{i=1}^n {}^e\delta q_i {}^eh_i(x)$$

dans lesquelles les grandeurs $^eh_i(x)$ sont les fonctions de base de l'élément fini générique et les variables eq_i et $^e\delta q_i$ sont les rotations nodales réelles et virtuelles de l'élément. En portant ces approximations dans la formulation faible approchée et en assemblant les contributions de tous les éléments finis, on obtient le système ci-après de n équations à n inconnues q_i

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

où la matrice de rigidité en torsion $\mathbf{K}$ est obtenue par assemblage des éléments finis

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{K}$$

tandis que le vecteur des moments externes $\mathbf{r}$, en l'absence de moment distribué sur les éléments finis, se ramène simplement à l'expression

$$\mathbf{r} = M_t \{-1, 0, \dots, 0, 1\}^T$$

Les composantes ${}^e k_{ij}$ de la matrice de rigidité élémentaire ${}^e\mathbf{K}$ s'écrivent

$${}^e k_{ij} = \int_0^{\ell} {}^e G {}^e I_p (d^e h_i / dx)(d^e h_j / dx) dx$$

où ${}^e G$ et ${}^e I_p$ sont le module de glissement et le moment d'inertie polaire de la section de l'élément ${}^e\Omega$. Pour un élément fini à deux nœuds de longueur ${}^e\ell$, la matrice élémentaire de rigidité en torsion vaut, par analogie avec la matrice de rigidité en traction d'un élément de barre,

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^e G {}^e I_p}{{}^e \ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En choisissant un réseau à deux éléments finis de longueur $\ell/2$, on obtient

$${}^1\mathbf{K} = {}^2\mathbf{K} = \frac{2GI_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage des deux matrices élémentaires conduit à la matrice globale suivante

$$\mathbf{K} = \frac{2GI_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2GI_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour un réseau à trois nœuds, le vecteur $\mathbf{r}$ devient

$$\mathbf{r} = M_t \{-1, 0, 1\}^T$$

Les rotations nodales cherchées sont donc les solutions du système d'équations d'ordre 3

$$\frac{2GI_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = M_t \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On relèvera que la matrice de rigidité n'est pas inversible (matrice non définie strictement positive), dès lors que la structure n'est soumise à aucune condition aux limites essentielle (rotation rigide possible). En annulant arbitrairement q_2 , on tire aisément du système d'équations les rotations aux extrémités de l'arbre

$$q_1 = -\frac{M_t \ell}{2GI_p}$$

$$q_3 = \frac{M_t \ell}{2GI_p}$$

qui correspondent aux valeurs exactes obtenues par la mécanique des structures.

Exercice 2

L'approche locale de la méthode des éléments finis conduit au système d'équations suivant

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

où la matrice de conductibilité $\mathbf{K}$ et le vecteur des sources d'énergie-chaleur $\mathbf{r}$ s'obtiennent par assemblage des éléments finis

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K} \quad r = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}$$

Les composantes ${}^e k_{ij}$ de la matrice de conductibilité élémentaire ${}^e \mathbf{K}$ et les termes ${}^e r_i$ du vecteur élémentaire des sources ${}^e \mathbf{r}$ s'écrivent

$${}^e k_{ij} = \int_0^{\ell} {}^e \kappa (d^e h_i / dx) (d^e h_j / dx) dx$$

$${}^e r_i = \int_0^{\ell} {}^e q {}^e h_i dx$$

où les grandeurs ${}^e h_i(x)$ sont les fonctions de base de l'élément fini générique ${}^e \Omega$ de longueur ${}^e \ell$, ${}^e \kappa$ est le coefficient de conductibilité thermique de l'élément et ${}^e q$ dénote la source d'énergie-chaleur appliquée à l'élément.

Pour un élément fini générique à deux nœuds de longueur ${}^e \ell$, la matrice élémentaire de conductibilité vaut, par analogie avec la matrice de rigidité en traction d'un élément de barre,

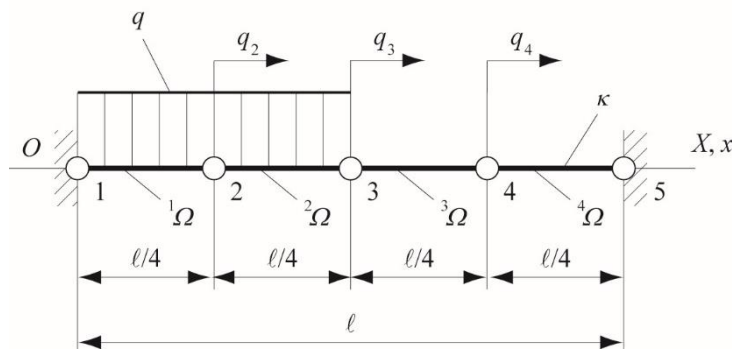
$${}^e \mathbf{K} = \frac{{}^e \kappa}{{}^e \ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En choisissant un réseau à quatre éléments finis de longueur $\ell/4$, on trouve

$${}^1 \mathbf{K} = {}^2 \mathbf{K} = {}^3 \mathbf{K} = {}^4 \mathbf{K} = \frac{4\kappa}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage des quatre matrices élémentaires conduit à la matrice globale suivante

$$\mathbf{K} = \frac{4\kappa}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4\kappa}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Pour les deux éléments $^1\Omega$ et $^2\Omega$, les composantes du vecteur des sources se calculent avec les changements de variables respectifs $x = \ell(1 + \xi)/8$ et $x = \ell(3 + \xi)/8$ avec $dx = \ell d\xi/8$

$$^1r_1 = ^2r_1 = \int_0^\ell {}^e q {}^e h_1 dx = \int_{-1}^{+1} q \frac{1}{2}(1-\xi) \frac{\ell}{8} d\xi = q\ell/8$$

$$^1r_2 = ^2r_2 = \int_0^\ell {}^e q {}^e h_2 dx = \int_{-1}^{+1} q \frac{1}{2}(1+\xi) \frac{\ell}{8} d\xi = q\ell/8$$

L'assemblage des quatre éléments donne, compte tenu de l'absence de source sur les éléments finis $^3\Omega$ et $^4\Omega$,

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8} \{1, 1+1, 1+0, 0, 0\}^T = \frac{q\ell}{8} \{1, 2, 1, 0, 0\}^T$$

Comme la température est imposée nulle aux extrémités du barreau, les températures nodales q_1 et q_5 s'annulent (suppression des première et cinquième colonnes de la matrice $\mathbf{K}$). Il en va de même des températures virtuelles δq_1 et δq_5 (suppression des première et cinquième lignes du système d'équations) en vertu du caractère thermiquement admissible des grandeurs virtuelles. Il s'ensuit que le système d'équations se condense en

$$\frac{4\kappa}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{8} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de solutions

$$q_2 = q_3 = \frac{q\ell^2}{16\kappa} \quad q_4 = \frac{q\ell^2}{32\kappa}$$

qui correspondent aux valeurs exactes.

Les graphes de la solution exacte (non calculée ici) et de l'approximation par éléments finis sont donnés à la figure ci-dessous.

